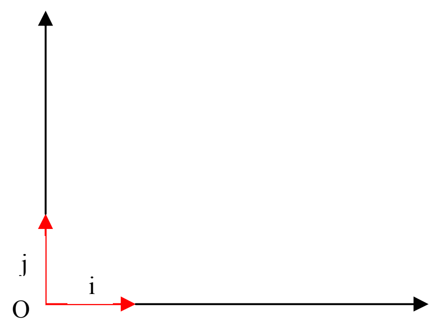
ECUACIÓN DE LA RECTA

Sistema de referencia.

Es el conjunto formado por:

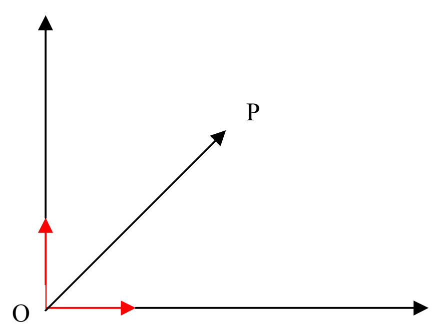
- Un punto O del plano llamado origen.
- Una base B ={i, j } para los vectores.

Cuando la base es ortonormal se tiene el sistema de referencia habitual y que utilizaremos a partir de ahora.

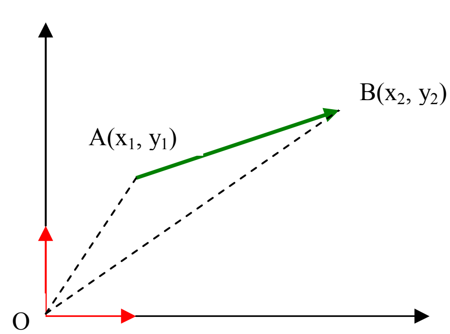


Vector de posición.

Dado un punto P, del plano llamaremos vector de posición de dicho punto al vector que se obtiene uniendo dicho punto con el origen.



Coordenadas del vector que une dos puntos.



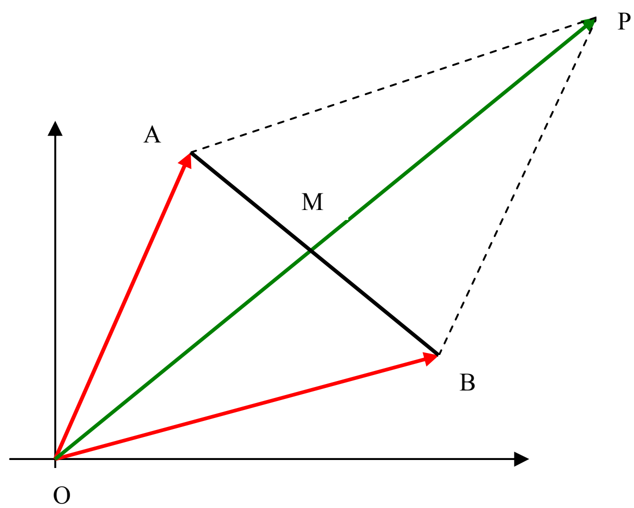
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ y de aquí resulta que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Si las coordenadas de A son (x_1, y_1) y las de B son (x_2, y_2) resulta:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

es decir, las coordenadas del vector que une los puntos A y B se obtienen restando a las coordenadas de B las de A.

Punto medio de un segmento.



Sea el segmento ***AB*** cuyo punto medio es ***M***

Si sumamos los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ por la regla del paralelogramo obtenemos que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ y multiplicando por ½ la igualdad resulta:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Y si las coordenadas de los puntos son: $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ y $M(x_m, y_m)$ obtenemos:

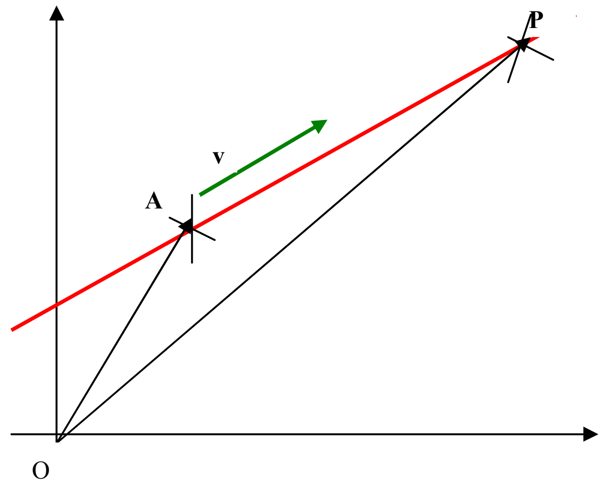
$(x_m, y_m) = \frac{1}{2}\left((x_o, y_o) + (x_1, y_1)\right) = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right)$, es decir, las coordenadas del punto medio de un segmento se obtienen haciendo la semisuma de los puntos extremos del segmento.

Ecuación vectorial de la recta.

Una recta queda determinada cuando se conoce un punto y un vector director de la misma.

Vector director es aquel que tiene la misma dirección que la recta.

Sea el siguiente sistema de referencia, también llamado sistema de coordenadas cartesianas:



Conocemos el punto ***A*** y el vector director ***v***. El punto ***P*** es un punto cualquiera de la recta.

Utilizando los vectores de posición de los puntos dados, resulta:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Además existe un número real λ tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda.v$

Por tanto, $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda.v$$

La ecuación obtenida $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda.v$ recibe el nombre de ecuación vectorial de la recta dada.
Se llama vectorial porque la conocemos a través de los vectores de posición de cada uno de sus puntos.

Si las coordenadas de cada uno de los vectores son:
$\overrightarrow{OP} = (x, y)$; $\overrightarrow{OA} = (x_0, y_0)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$
se obtiene

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(v_1, v_2)$$

que es la ecuación vectorial de la recta expresada en coordenadas.
Para cada valor que le demos a λ se obtiene un punto de la recta y si le dados todos los valores de los números reales se obtienen todos los puntos.

Ecuaciónes paramétricas

Se obtienen a partir de la ecuación vectorial expresando por separado cada variable:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda.v_1 \\ y &= y_0 + \lambda.v_2 \end{aligned}$$

Ecuación continua.

Se obtiene a partir de las ecuaciones paramétricas eliminando λ en el sistema:

$$x = x_0 + \lambda . v_1$$
$$y = y_0 + \lambda . v_2$$

En la primera ecuación, $\lambda = \dfrac{x - x_0}{v_1}$

Y en la segunda, $\lambda = \dfrac{y - y_0}{v_2}$

Igualando los valores de λ se obtiene la ecuación continua:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Ejemplo 1:

La ecuación de la recta que pasa por el punto *A(2, - 1)* y tiene como vector director a *v = i – 4j*, será:
El vector v lo expresamos como *v = (1, -4)* y entonces,

$(x, y) = (2,-1) + \lambda(1,-4)$ (Forma vectorial)

$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 4\lambda \end{cases}$ (En paramétricas)

$\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 1}{-4}$ (Forma continua)

Ecuación general o implícita

Se obtiene a partir de la ecuación continua operando y simplificando hasta llegar a la forma

$$Ax + By + C = 0$$

Puesta la ecuación de una recta en forma general, el vector *v = (- B, A)* es un vector director de la misma, en efecto,

$\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}$. Si quitamos denominadores, $v_2 (x - x_0) = v_1(y - y_0)$

Y eliminado paréntesis y ordenando en forma adecuada resulta:

$v_2 x - v_1 y - v_2 x_0 + v_1 y_0 = 0$ lo que nos dice que $v_1 = - B$ y $v_2 = A$

Ecuación explícita.

Tiene la forma $y = mx + n$. Y podemos llegar a ella despejando ***y*** en la ecuación general:

A ***m*** se le llama pendiente de la recta y a ***n*** ordenada en el origen.

Si $Ax + By + C = 0$, entonces $y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{A}$

Haciendo $\frac{-A}{B} = m$ y $\frac{-C}{A} = n$ resulta la ecuación explícita.

Ejemplo 2:

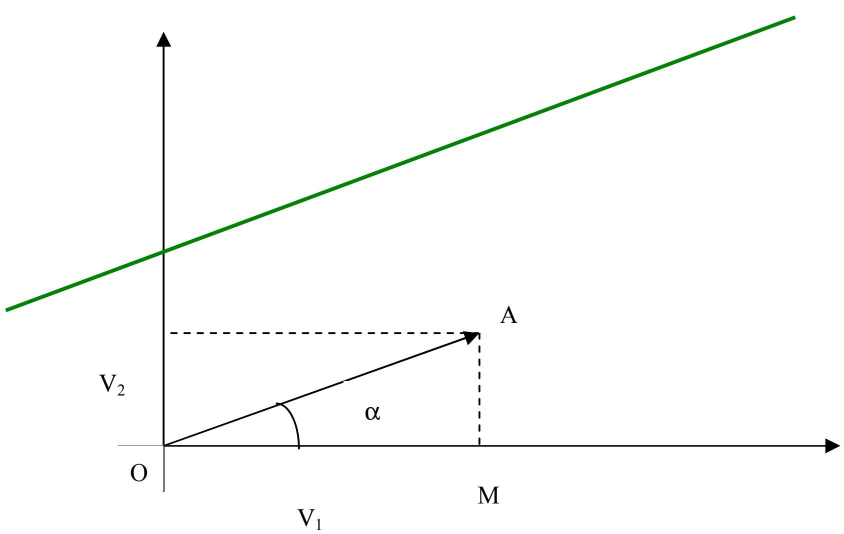
Dada la recta de ecuación $\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3}$, su ecuación general será:

$3x + 3 = 2y - 10 \Rightarrow 3x - 2y + 13 = 0$

Y la ecuación implícita: $2y = 3x + 13 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$

La pendiente es 3/2 y la ordenada en el origen 13/2.

También se verifica que $m = \frac{v_2}{v_1}$ como puede verse en el dibujo.



En el triángulo OMA, la pendiente de la recta es la tangente de α

$$es\ decir,\ m = tg\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{v_2}{v_1}$$

Ecuación punto-pendiente.

Tiene la forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ y se emplea cuando se conoce un punto de la recta ***(x₀, y₀)*** y la pendiente ***m.***

Podemos llegar a ella a partir de la ecuación continua de la forma siguiente:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Si quitamos denominadores, $(y - y_0)v_1 = v_2(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_0)$

Y como $m = \frac{v_2}{v_1}$ se obtiene $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

Ejemplo 3:
Dada la ecuación general de una recta x – 3y + 4 =0, escribir su ecuación punto-pendiente.

La pendiente podemos obtenerla despejando la ***y***:
$3y = x + 4 \Rightarrow y = \frac{x+4}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. La pendiente es 1/3.
Ahora necesitamos un punto cualquiera que se obtiene dando un valor arbitrario a una de las incógnitas y obteniendo el correspondiente valor de la otra, por ejemplo, si hacemos $x = 2$, se obtiene $y = 2$, luego un punto es *(2, 2)*
Aplicando la fórmula estudiada obtenemos:

$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 2)$. (Ecuación punto-pendiente)

Ecuación canónica o segmentaria.

Su forma es la siguiente: $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

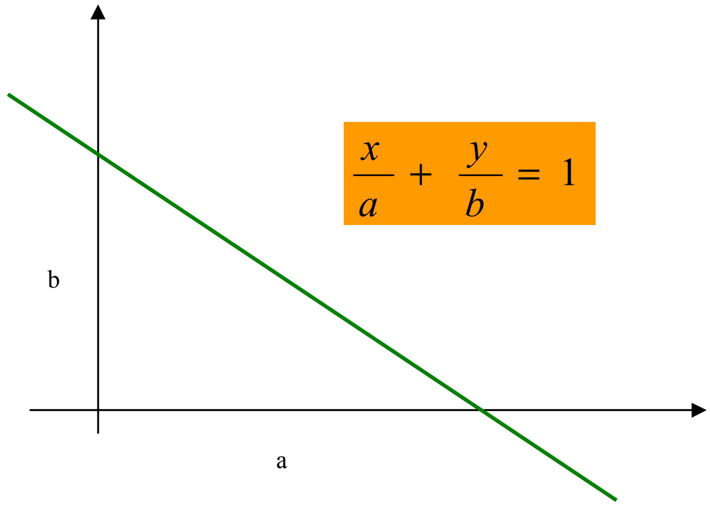
Su ventaje es la facilidad para ser representada gráficamente.
Para llegar a ella podemos partir de la ecuación general:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow Ax + By = -C$$

Dividimos por – C: $\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = -1$

Pasamos A y B al denominador:

$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$. Haciendo $-C/A = a$ y $-C/B = b$, se obtiene la ecuación canónica.



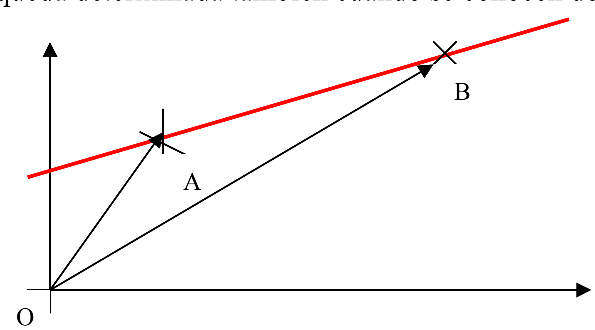
Ejemplo 4:

La ecuación general de una recta es *2x +5y –4=0.*, expresarla en forma canónica.

$$2x + 5y = 4 \Rightarrow \frac{2x}{4} + \frac{5y}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{4/5} = 1$$

Recta que pasa por dos puntos.

Una recta queda determinada también cuando se conocen dos puntos de la misma.



Conocidos los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ podemos obtener un vector director restando las coordenadas de los mismos:

$v = (x_1, y_1) - (x_0, y_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ y ya podemos escribir su ecuación en cualquiera de las formas que ya conocemos, utilizando el vector obtenidos y uno de los puntos conocidos, por ejemplo, la ecuación continua usando el vector *v* y el punto *A*, será:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

También podemos escoger el punto *B* en lugar del *A*.

Posición relativa de dos rectas.

Rectas dadas en forma general:

Sean las rectas

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

a) Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ las rectas son coincidentes.
b) Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ las rectas son paralelas.
c) Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ las rectas son secantes (Se cortan en un punto)

Rectas dadas en forma explícita.

Sean las rectas

$$y = mx + n$$
$$y = m'x + n'$$

a) Si $m = m'$ y $n = n'$ rectas coincidentes.
b) Si $m = m'$ pero $n \neq n'$ rectas paralelas
c) Si $m \neq m'$ las rectas son secantes.

En el caso de rectas secantes, para hallar el punto de intersección sed resuelve el sistema formado por ambas rectas.

Ejemplo 5:

Determina la posición relativa de las rectas $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$ y $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 6t \end{cases}$

Como las rectas vienen dadas en forma paramétrica podemos terminar facilmente el vector director de cada una de ellas y, a partir de este, las respectivas pendientes:

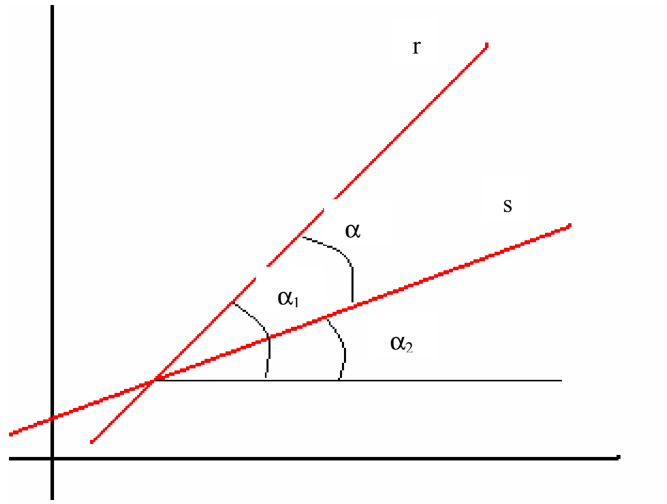
En la primera: v = (1, - 3) ⇒ m = -3/1 = - 3

En la segunda: v´= (2, - 6) ⇒m´=- 6/2 = - 3

Las rectas son paralelas.

Otra manera podría de hacerlo sería pasando las ecuaciones a su forma general y a continuación estudiar si los coeficientes de las incógnitas son proporcionales.

Ángulo formado por dos rectas.



Lo hacemos en primer lugar a través de sus pendientes:

El ángulo formado por las rectas r y s es α

La pendientes de la recta r es $m = tg\alpha_1$

La pendiente de la recta s es $m' = tg\alpha_2$

Entonces resulta:

$$tg\alpha = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 . tg\alpha_2} = \frac{m - m'}{1 + m.m'}$$

Para obtener el menor de los ángulos lo hacemos en valor absoluto, es decir,

$$\boxed{tg\alpha = \left|\frac{m - m'}{1 + m.m'}\right|}$$

Si el ángulo es de 0º,

$tg0 = 0 \Rightarrow \dfrac{m - m'}{1 + m.m'} = 0 \Rightarrow m - m' = 0$, es decir, $m = m'$ (Condición de paralelismo)

Si el ángulo es de 90º,

$tg90 = \infty \Rightarrow 1 + m.m' = 0$, es decir, $m = -\dfrac{1}{m'}$ (Condición de perpendicularidad)

En el caso de rectas dadas en su forma general,

$$\begin{cases} r : Ax + By + C = 0 \\ s : A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

el ángulo formado por ellas es el de sus vectores directores.

$u = (-B, A)$ es un vector de director de la recta r

$v = (-B', A')$ es un vector director de la recta s, entonces, según la definición de producto escalar, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{|u.v|}{\|u\|.\|v\|} = \frac{|A.A' + B.B'|}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

resultado que tomamos en valor absoluto para obtener el menor de los ángulos.

Ejemplo 6:

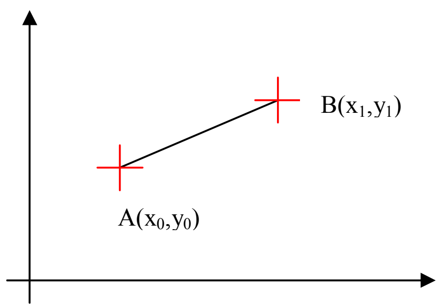
El ángulo formado por las rectas *y = 3x + 5, y = - 2x + 1* será:

Pendiente de la primera recta *m = 3*

Pendiente de la segunda recta *m´= - 2*

$$tg\alpha = \left|\frac{m - m'}{1 + m - m'}\right| = \left|\frac{3 - (-2)}{1 + 3.(-2)}\right| = 1 \Rightarrow \alpha = 45^o$$

Distancia entre dos puntos.



La distancia entre dos puntos A y B es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

Sabemos que $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, luego

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

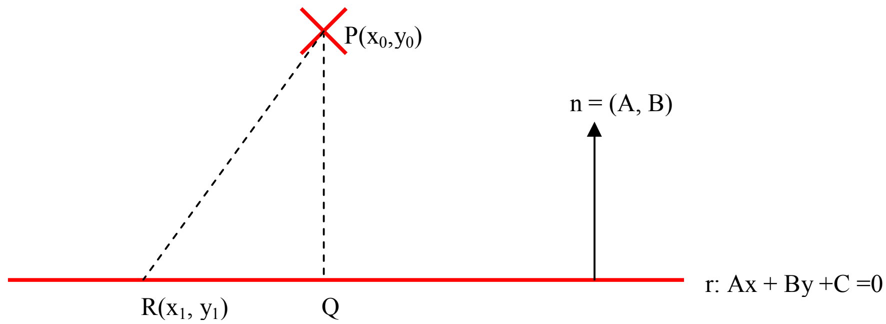
Ejemplo 7

Dados los puntos A(-2, 1) y B(3, 5), la distancia entre ellos será:

$$d(A,B) = \sqrt{(3+2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{41}$$

También puede tomarse el vector $\overrightarrow{BA}$, en lugar de $\overrightarrow{AB}$

Distancia de un punto a una recta



Operando con vectores resulta:

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP}$

Multiplicando por n:

$\overrightarrow{RP}.n = \overrightarrow{RQ}.n + \overrightarrow{QP}.n$ y como $\overrightarrow{RQ}.n = 0$ porque son perpendiculares, queda que

$\overrightarrow{RP}.n = \overrightarrow{QP}.n$, es decir,

$\overrightarrow{RP}.n = \left\|\overrightarrow{QP}\right\|.\|n\|\cos\alpha$, pero como los vectores $\overrightarrow{QP}$ y n son paralelos, $\cos\alpha = \pm 1$, luego, tomando valores absolutos,

$$\left|\overrightarrow{RP}.n\right| = \left\|\overrightarrow{QP}\right\|.\|n\| \Rightarrow \left\|\overrightarrow{QP}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{RP}.n\right|}{\|n\|}$$

Por otra parte

$$\left\|\overrightarrow{QP}\right\| = \text{distancia del punto a la recta} = \text{d}$$

$$\overrightarrow{RP} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$$

$$n = (A, B)$$

luego,

$$d = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

pero como el punto (x_1, y_1) está en la recta, $Ax_1 + By_1 + C = 0$ y entonces $C = -Ax_1 - By_1$

La distancia buscada queda definitivamente de la forma siguiente:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Ejercicios resueltos

1.- Comprueba que las rectas $r \equiv x + y - 2 = 0$ y $s \equiv x - 2y + 4 = 0$ son secantes y halla el punto de intersección de las mismas.

Solución:

$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}$, es decir, los coeficientes de las incógnitas no son proporcionales, por tanto, las rectas son secantes.

El punto de intersección se halla resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

sumando se obtiene: $3y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2$

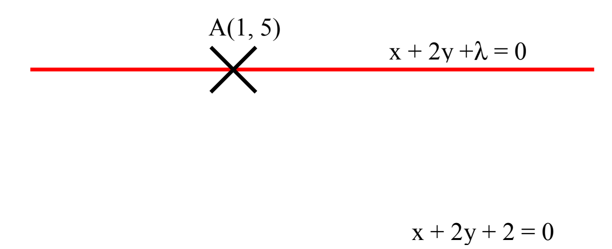
Sustituyendo el valor de y obtenido en cualquiera de las ecuaciones se obtiene $x = 0$

Las rectas se cortan en el punto $P(0,2)$ y lo podemos expresar así:

$$r \cap s = P(0,2)$$

2.- Halla la ecuación de la recta que, pasando por el punto *A(1, 5),* es paralela a la recta $x + 2y + 2 = 0$

Solución:



La recta paralela buscada será $x + 2y + \lambda = 0$

Y como pasa por el punto A(1, 5) tenemos:

$1 + 2.5 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -11$

Por tanto, la recta pedida es $x + 2y - 11 = 0$

3.- Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv 5x - y + 11 = 0$

Solución:

Hacemos $x = \lambda$

Entonces, $5\lambda - y + 11 = 0 \Rightarrow y = 5\lambda + 11$

Las ecuaciones paramétricas de r quedan en la forma siguiente:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 11 + 5\lambda \end{cases}$$

Otra manera:

1º.- Hallamos un vector director de la recta:

$v = (-B, A) = (1,5)$

2º.- Obtenemos un punto de r dando un valor arbitrario a una de las incógnitas:

Para x = 1,

5.1- y + 11 = 0 $\Rightarrow$ y = 16

Un punto de la recta es (1, 16)

Aplicando la fórmula: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \end{cases}$ se obtiene:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 16 + 5\lambda \end{cases}$$

4.- Halla un punto de la recta 4x – 8y + 7 = 0 que equidiste de los puntos A(2, 1) y B(1, -3).

Solución:

Sea $P(x_0, y_0)$ el punto que buscamos:

Como pertenece a la recta r, se ha de cumplir que $4x_0 - 8y_0 + 7 = 0$ *(*)*

Además, d(P, A) = d(P, B), es decir, $\sqrt{(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2} = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 + 3)^2}$

Elevando al cuadrado y desarrollando los cuadrados,

${x_0}^2 - 4x_0 + 4 + {y_0}^2 - 2y_0 + 1 = {x_0}^2 - 2x_0 + 1 + {y_0}^2 + 6y_0 + 9$, que simplificando se transforma en $2x_0 + 8y_0 + 5 = 0$ (**).

Formando un sistema con las ecuaciones (*) y (**),

$$\begin{cases} 4x_0 - 8y_0 + 7 = 0 \\ 2x_0 + 8y_0 + 5 = 0 \end{cases}$$

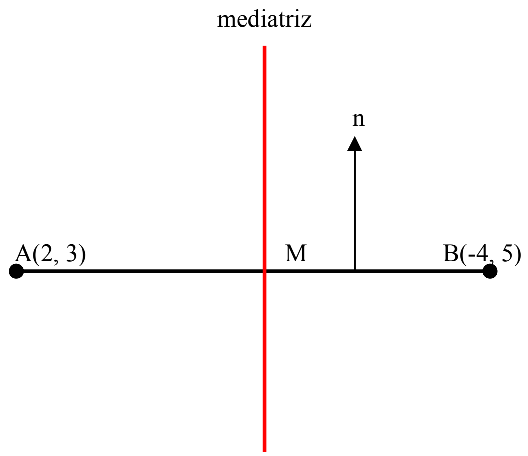
Sumando, $6x_0 + 12 = 0 \Rightarrow x_0 = -2$

Y sustituyendo el valor de x_0 en cualquiera de las ecuaciones del sistema, se obtiene $y_0 = -1/8$

El punto buscado es $P\left(-2, -\frac{1}{8}\right)$

5.- Halla la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos *A(2, 3)* y *B(-4, 5)*.

Solución:



La mediatriz es la perpendicular en el punto medio del segmento.

Coordenadas del punto medio: $M\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = M(-1,4)$

Vector que une los puntos A y B: $\overrightarrow{AB} = (-4-2, 5-3) = (-6,2)$

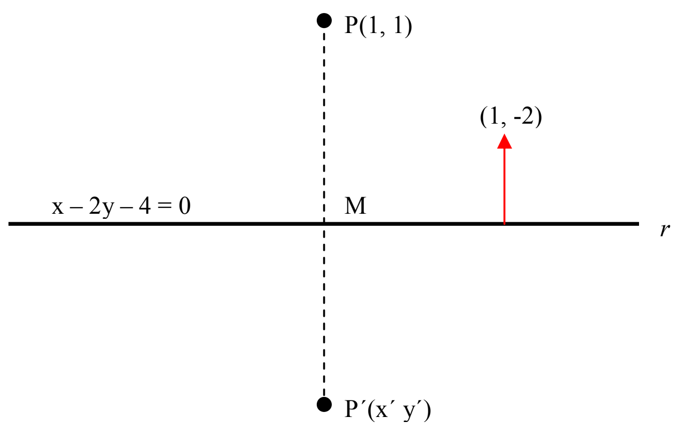
Un vector perpendicular a M será vector director de la mediatriz. Dicho vector lo podemos obtener cambiando de orden de las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y el signo de una de ellas, es decir, *n = (2, 6)* es vector director de la mediatriz.

La ecuación de la mediatriz será:

$\frac{x-(-1)}{2} = \frac{y-4}{6}$ que se queda de la forma siguiente: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{3}$

6.- Halla el punto simétrico de *P(1, 1)* respecto de la recta *r: x – 2y – 4 = 0*

Solución:



Recta que pasa por *P(1, 1)* y es perpendicular a la recta r:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2} \Rightarrow -2x+2=y-1 \Rightarrow \quad 2x+y-3=0$$

La intersección de las dos rectas nos da las coordenadas de *M* que es punto medio de *P* y de *P´*:

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-4=0 \\ 4x+2y-6=0 \end{cases}$$ Sumando: $5x = 10 \Rightarrow \quad x = 2$

Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones del sistema se obtiene $y = -1$

Luego las coordenadas de M son *(2, - 1)*

Y aplicando las fórmulas del punto medio de un segmento se obtiene *P´*

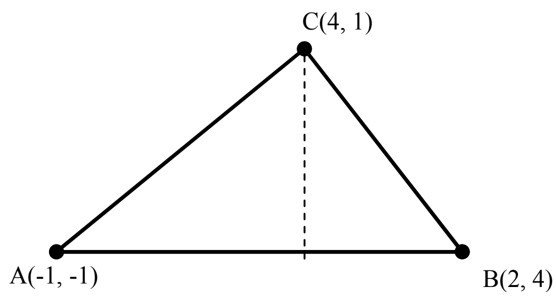
$$\frac{1+x'}{2}=2 \Rightarrow x'=3\,; \qquad \frac{1+y'}{2}=-1 \Rightarrow y'=-3$$

El simétrico de *P(1, 1)* es $P'(3,-3)$

7.- Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos *A(-1, -1), B(2, 4) y C(4, 1)*

Solución:

Para hallar el área pedida seguiremos los siguientes pasos:



- Base del triángulo: es la distancia entre los puntos A y B.

  $base = d(A,B) = \sqrt{(2+1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

- Recta que pasa por A y B:

  $v = (3,5)$ vector director de la recta buscada.

  Con dicho vector y uno de los puntos, por ejemplo, B(2, 4) escribimos la ecuación:

  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{5} \quad \Rightarrow \quad 5x - 10 = 3y - 12 \quad \Rightarrow \quad 5x - 3y + 2 = 0$

- Altura del triángulo: es la distancia del punto *C(4, 1)* a la recta $5x - 3y + 2 = 0$

  $h = \frac{|5.4 - 3.1 + 2|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2}} = \frac{19}{\sqrt{34}}$

- Aplicamos la fórmula $Area = \frac{1}{2} base \times .altura$

  $Area = \frac{1}{2}\cancel{\sqrt{34}}.\frac{19}{\cancel{\sqrt{34}}} = \frac{19}{2} = 8{,}5\,; \qquad Area = 8{,}5u^2$

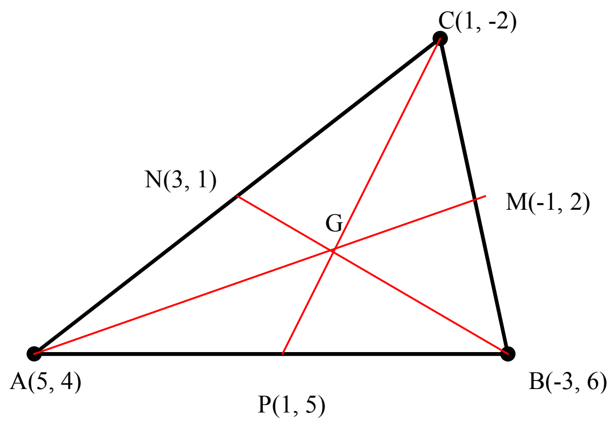
8.- Dado el triángulo de vértices A(4, 5), B(-2, 3) y C(1, -2),

- Halla las ecuaciones de las medianas.
- Comprueba que se cortan en un punto llamado baricentro
- Comprueba que el baricentro puede obtenerse también hallando la media aritmética de las coordenadas de los tres vértices.

Solución:

Una mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Baricentro es el punto de intersección de las tres medianas.



Los puntos M, N y P son los puntos medios de los lados del triángulo que se han obtenido como semisuma de los extremos de cada lado.

- Recta AM:

  Un vector director de la misma será: $\overrightarrow{MA} = (6,2)$. Con dicho vector y el punto $A(5,4)$ escribimos la ecuación de la recta que contiene a la primera mediana.

  $$\frac{x-5}{6} = \frac{y-4}{2} \Rightarrow 2x - 10 = 6y - 24 \Rightarrow 2x - 6y + 14 = 0$$

- Recta BN:

  Un vector director de ella será: $\overrightarrow{BN} = (6,-5)$. Con dicho vector y el punto B(-3, 6) escribimos la ecuación que contiene a la segunda mediana:

  $$\frac{x+3}{6} = \frac{y-6}{-5} \Rightarrow -5x - 15 = 6y - 36 \Rightarrow 5x + 6y - 21 = 0$$

- Recta CP:

  Un vector director: $\overrightarrow{CP} = (0,7)$. Con dicho vector y el punto C(1, -2) escribimos la ecuación de la tercera mediana:

  $$\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{7} \Rightarrow 7x - 7 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$$

Para hallar el baricentro resolvemos el sistema formado por dos de las ecuaciones obtenidas, por ejemplo,

$$\begin{cases} 2x - 6y + 14 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

De la 2ª ecuación se obtiene que $x = 1$. Y sustituyendo en la 1ª, $2.1 - 6y + 14 = 0$

$y = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ Las coordenadas del baricentro son $G\left(1, \frac{8}{3}\right)$

Puede comprobarse que se obtiene la misma solución escogiendo dos medianas cualesquiera.

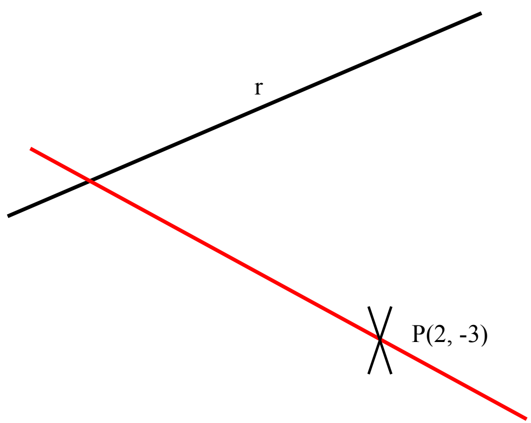
El baricentro obtenido puede obtenerse directamente y mucho más rápido hallando la media aritmética de las coordenadas de los tres vértices, es decir,

$$G\left(\frac{5-3+1}{3},\frac{4+6-2}{3}\right)=G\left(1,\ {}^{8}\!/_{3}\right)$$

9.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto *P(2, -3)* y forma un ángulo de 45º con la recta r: *3x – y + 3 = 0*

Solución:

Escribimos la recta dada en su forma explícita: $y = 3x + 3$. Su pendiente es $m = 3$.



La recta que buscamos tendrá de pendiente m'

Aplicando la fórmula del ángulo formado por dos rectas en función de sus pendientes,

$$tg\alpha=\frac{m-m'}{1+m.m'} \Rightarrow tg45^{o}=\frac{3-m'}{1+3m'} \Rightarrow 1=\frac{3-m'}{1+3m'} \Rightarrow 1+3m'=3-m'$$

es decir, $4m'=2 \Rightarrow \quad m'=\dfrac{1}{2}$

De la recta que buscamos ya conocemos su pendiente y uno de sus puntos. Su ecuación será: $\boxed{y+3=\frac{1}{2}(x-2)}$ (Ecuación punto-pendiente)

Existe otra solución que se obtiene llamando m' a la pendiente de la recta dada, m a la pendiente de la recta que buscamos y aplicando la misma fórmula.

10.- Averigua el valor del parámetro m para que las rectas $-x+(m-1)y-3=0$ y $mx-6y+2$ sean:

a) Paralelas.

b) Perpendiculares.

Solución:

a) Condición de paralelismo: $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$, por tanto, $\frac{-1}{m}=\frac{m-1}{-6} \Rightarrow$, es decir,

$$6=m(m-1) \;\Rightarrow\; m^2-m-6=0 \;\Rightarrow\; m=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-6)}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$$

b) Condición de perpendicularidad: $A.A'+B.B'=0$, (Producto escalar nulo)

por tanto, $(-1).m+(-6)(m-1)=0 \Rightarrow m-6m+6=0 \Rightarrow 5m=6$,

es decir, $m={}^{6}\!/_{5}$

Ejercicios propuestos

1.- Halla la recta que pasa por el punto *A(1 , -1)* y es perpendicular a la recta de ecuación *3x – 2y + 4 = 0*. Escribe la ecuación en forma canónica.

2.- Averigua la distancia entre el punto *P(2, -5)* a la recta *r: x – 2 –12 = 0*

3.- Halla la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto *A(1, -4)* y calcula cuál de ellas es la que tiene de pendiente $m={}^{2}\!/_{3}$

4.- Dado el triángulo de vértices *A(-3, 1), B(-1, 5)* y *C(5, - 3),* calcula la mediatriz del lado *AB* y la del lado *AC*. Halla las coordenadas del circuncentro (Punto de intersección de las tres mediatrices).

Sol. x + 2y = 4; 2x – y = 3; Circuncentro: O(2, 1)

5.- Halla el área del triángulo que tiene por vértices los puntos *A(2, 1), B(6, 2)* y *C(3, 5).* *Sol: 29/2 unidades cuadradas*

6.- Calcula el área de la región limitada por las rectas $2x-3y=4$, $2x+3y=16$ y $2x-y=0$

7.- Halla el valor de k para que la recta $2x+ky+3=0$ forme un ángulo de 60º con el eje de abscisas. $k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8.- Halla el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos *A(-2, 3), B(6, -3)* y *C(4, 5)*. *Sol. G(8/3, 5/3)*

9.- Dos vértices opuestos de un cuadrado son *A(2, 2)* y *C(6, 4)* Calcula los otros dos vértices y el área.
Sol. B(5, 1); D(3, 5); Área = 10 u^2

10.- Calcula el valor de a para que las rectas $r\equiv 2x+ay-3=0$, $s\equiv 3x+5y-1=0$ sea paralelas. *Sol. a = 10/3*

11.- Encuentra el simétrico del punto *P(2, 6)* respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrante. *Sol. P´(6, 2)*

12.- Halla la distancia entre las siguientes rectas:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}\ ;\qquad 2x-3y+10=0$$

Sol. $\frac{5}{\sqrt{13}}$ *unidades*

13.- Calcula en los siguientes casos el valor de k, para que la recta $x+ky+1=0$

a. Su pendiente sea 3
b. Pase por el punto (2, 1)
c. Sea paralela a la recta $x+2y-5=0$
d. Sea perpendicular a la recta $2x-y+4=0$

14.- Halla el ángulo formado por las siguientes rectas:
$(x, y=(2,3)+\lambda(4,1)$; $(x,y)=(-3,-2)+\lambda(1,4)$